Fonction vectorielle d'une variable réelle

I. Approximation de fonctions

1°) Subdivision

Déf : On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ toute suite finie $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ strictement croissante et vérifiant : $a_0=a$ et $a_n=b$. Les a_i sont alors appelés points de la subdivision σ et les intervalles ouverts $]a_{i-1},a_i[$ sont appelés intervalles de subdivision.

Déf : On appelle support d'une subdivision σ de $[a,b]$ l'ensemble : $\text{Supp}(\sigma)=\{a_0,a_1,...,a_n\}$.

Déf : Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$.
On dit que σ est plus fine que σ' ssi $\text{Supp}(\sigma')\subset\text{Supp}(\sigma)$.

Déf : Soit σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$.
On appelle réunion de deux subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,b]$ la subdivision σ de support $\text{Supp}(\sigma_1)\cup\text{Supp}(\sigma_2)$. Celle-ci est plus fine que σ_1 et σ_2.

2°) Fonction en escalier

Déf : Une fonction $\varphi:[a,b]\to E$ est dite en escalier ssi il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle de subdivision $]a_{i-1},a_i[$. Une telle subdivision est alors dite adaptée à φ. On note $\mathcal{E}([a,b],E)$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop : $\mathcal{E}([a,b],E)$ et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],E)$.

Théorème :
$\forall f\in\mathcal{C}([a,b],E)$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\varphi\in\mathcal{E}([a,b],E)$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty\le\varepsilon$.

Cor : Toute fonction $f:[a,b]\to E$ continue est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

3°) Fonction affine par morceaux

Déf : Une fonction $\varphi:[a,b]\to E$ est dite affine par morceaux ssi il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ telle que φ soit affine, c'est-à-dire de la forme : $t\to t.\alpha+\beta$ (avec $\alpha,\beta\in E$) sur chaque intervalle de subdivision $]a_{i-1},a_i[$. Une telle subdivision est alors dite adaptée à φ.
On note $\mathcal{A}([a,b],E)$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop : $\mathcal{A}([a,b],E)$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}([a,b],E)$.

Théorème :
$\forall f\in\mathcal{C}([a,b],E)$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\varphi\in\mathcal{A}([a,b],E)\cap\mathcal{C}([a,b],E)$, $\|f-\varphi\|_\infty\le\varepsilon$.

Cor : Toute fonction $f:[a,b]\to E$ continue est limite uniforme d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux.

4°) Fonction continue par morceaux

Déf : Une fonction $f:[a,b]\to E$ est dite continue par morceaux ssi il existe $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, la restriction de f à $]a_{i-1},a_i[$ est prolongeable par continuité à $[a_{i-1},a_i]$.
Une telle subdivision σ est alors dite adaptée à la fonction f.
On note $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],E)$ l'ensemble de ses fonctions.

Prop : $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],E)$.

Prop : Les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ y sont bornées.

Théorème :

$\forall f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],E)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in \mathcal{E}([a,b],E)$, $\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Cor : Toute fonction continue par morceaux sur I est limite uniforme d'une suite de fonction en escalier.

Déf : Une fonction $f : I \to E$ est dite continue par morceaux ssi sa restrictions à tout segment $[a,b] \subset I$ est continue par morceaux. On note $\mathcal{C}^0_{pm}(I,E)$ l'ensemble de ses fonctions

Prop : $\mathcal{C}^0_{pm}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

II. Dérivation des fonctions d'une variable réelle

1°) Vecteur dérivé

Déf : Soit $a \in I$. On dit que $f : I \to E$ est dérivable en a ssi $\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)$ CV quand $h \to 0$. Sa limite est appelée vecteur dérivé de f en a . On la note $f'(a)$ ou $Df(a)$.

Déf : Soit $a \in I$ non extrémité droite de I . On dit que $f : I \to E$ est dérivable à droite en a ssi $\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)$ CV quand $h \to 0^+$. Sa limite est alors appelée vecteur dérivé à droite de f en a , on la note $f'_d(a)$. Idem à gauche.

Prop : Soit $f : I \to E$ et $a \in I^\circ$. On a équivalence entre :
(i) f est dérivable en a ,
(ii) f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.
De plus si tel est le cas $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

2°) Fonction dérivable

Déf : Une fonction $f : I \to E$ est dite dérivable ssi elle l'est en tout point de I .
La fonction de I vers E qui à t associe $f'(t)$ est appelée dérivée de f . On la note f' ou Df .
On note $\mathcal{D}(I,E)$ l'ensemble des fonctions de I vers E dérivables.

Prop : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $f : I \to E$. On a équivalence entre :
(i) f est dérivable
(ii) les fonctions composantes de f le sont.
De plus si tel est le cas : $f'(t) = f'_1(t)e_1 + \cdots + f'_n(t)e_n$.

3°) Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème :
Soit $f,g : I \to E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si f et g sont dérivables alors λf et $f+g$ le sont aussi et on a $(\lambda f)' = \lambda f'$ et $(f+g)' = f' + g'$.

Théorème :
Soit $f : I \to E$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si f est dérivable alors $u(f) : t \mapsto u(f(t))$ est dérivable et $(u(f))' = u(f')$.

Théorème :
Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire et,.
Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables alors $b(f,g) : t \mapsto b(f(t),g(t))$ est dérivable et $b(f,g)' = b(f',g) + b(f,g')$.

Cor : Soit E une algèbre.
Si $f,g : I \to E$ sont dérivables alors fg l'est aussi $(fg)' = f'g + fg'$.

Cor : Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to E$ sont dérivables alors $\alpha.f$ aussi et $(\alpha.f)' = \alpha'.f + \alpha.f'$.

Théorème :
Soit $m : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$ une application multilinéaire.

Si $f_1 : I \to E_1, \ldots, f_n : E_n \to I$ sont dérivables alors $m(f_1,\ldots,f_n) : x \mapsto m(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ est dérivable et $m(f_1,\ldots,f_n)' = \sum_{i=1}^{n} m(f_1,\ldots,f_i',\ldots,f_n)$.

4°) Inégalité des accroissements finis

Théorème :

Soit $f : I \to E$ continue et dérivable sur l'intérieur de I.

S'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in I^\circ, \|f'(t)\| \leq M$ alors $\forall a,b \in I, \|f(b)-f(a)\| \leq M|b-a|$. Ainsi f est M-lipschitzienne.

Cor : Soit $f : I \to E$ continue et dérivable sur l'intérieur de I.

Si $\forall t \in I^\circ, f'(t) = 0$ alors f est constante.

5°) Dérivée d'ordre p

Déf : Soit $f : I \to E$.

On pose $f^{(0)} = f$ appelée dérivée d'ordre 0 de f.

Si $f^{(0)}$ est dérivable, on pose $f^{(1)} = f'$ appelée dérivée d'ordre 1 de f.

Par récurrence :

Si $f^{(p)}$ existe et est dérivable, on pose $f^{(p+1)} = f^{(p)\prime}$ appelée dérivée d'ordre $p+1$ de f.

On note $\mathcal{D}^p(I,E)$ l'ensemble des fonctions p fois dérivables de I vers E.

Prop : Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $f : I \to E$. On a équivalence entre :

(i) $f : I \to E$ est p-fois dérivable,

(ii) ses fonctions composantes $f_1,\ldots,f_n$ le sont.

De plus, si tel est le cas : $\forall t \in I$, $f^{(p)}(t) = f_1^{(p)}(t)e_1 + \cdots + f_n^{(p)}(t)e_n$.

Théorème :

Soit $f,g : I \to E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si f et g sont p fois dérivables alors λf et $f+g$ le sont aussi et on a $(\lambda f)^{(p)} = \lambda f^{(p)}$ et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.

Cor : $\mathcal{D}^p(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$. et l'application $f \mapsto f^{(p)}$ y est linéaire.

Théorème :

Soit $f : I \to E$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si f est p fois dérivable alors $u(f)$ aussi $(u(f))^{(p)} = u(f^{(p)})$.

Théorème : (formule de Leibniz)

Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire.

Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont p fois dérivables alors $b(f,g)$ l'est aussi et

$$b(f,g)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b(f^{(p-k)}, g^{(k)}).$$

Cor : Si E est une algèbre.

Si $f,g : I \to E$ sont p fois dérivables alors fg aussi.

Cor : Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to E$ sont p fois dérivables alors $\alpha.f$ aussi.

6°) Classe d'une fonction

Déf : Une fonction $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$ ssi f est p fois dérivable et $f^{(p)}$ est continue.

Une fonction $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi elle est $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{C}^p(I,E)$ (pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de I vers E.

Prop : $\mathcal{C}^p(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

7°) Fonction de classe Cp par morceaux

Déf : Une fonction $f:[a,b]\to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux ssi il existe $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, la restriction de f à $]a_{i-1},a_i[$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ à $[a_{i-1},a_i]$. Une telle subdivision σ est alors dite adaptée à la fonction f.

Prop : Soit $f:[a,b]\to E$ est continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$. On a équivalence entre :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

(ii) f' converge en a^+.

Déf : Une fonction $f:I\to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux ssi ses restrictions sur tout segment $[a,b]\subset I$ sont $\mathcal{C}^p$ par morceaux.

Prop : L'ensemble $\mathcal{C}^p_{pm}(I,E)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux de I vers E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

III. Intégration des fonctions d'une variable réelle

1°) Primitives

Déf : On appelle primitive d'une fonction $f:I\to E$ toute application $F:I\to E$ dérivable et vérifiant $F'=f$.

Prop : Si F est primitive de f alors les autres primitives de f sont de la forme $F+C^{te}$.

Déf : On note $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C^{te}$ pour signifier que F est une primitive de f.

Théorème :

Toute fonction $f:I\to E$ continue admet des primitives.

2°) Intégrale

Déf : Soit $f:I\to E$ une fonction continue. Pour tout $a,b\in I$, on appelle intégrale de f de a à b le vecteur :

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de F.

Théorème :

Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et $f:I\to E$ de fonctions composantes $f_1,\dots,f_n$ alors

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t\right)e_1+\cdots+\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)e_n$.

Théorème :

Soit $f,g:I\to E$ continues et $\lambda\in\mathbb{K}$.

$\forall a,b\in I$, $\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f$, $\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$.

Théorème :

Soit $f:I\to E$ continue. $\forall a,b,c\in I$, $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Théorème :

Soit $a\le b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to E$ continue. On a : $\left\|\int_a^b f\right\|\le\int_a^b\|f\|$.

3°) Extension aux fonctions continues par morceaux

Déf : Soit $f:I\to E$ continue par morceaux. Pour $a\le b\in I$, on pose $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^n\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\mathrm{d}t$ avec $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. On pose aussi $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

4°) Formules de Taylor

Théorème :

Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t .$$

Cor : Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ et $f^{(n+1)}$ bornée alors $\forall a, x \in I$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} .$$

Théorème :

Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Quand $x \to a$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

Cette relation est appelée développement limité de f à l'ordre n en a.

5°) Applications : le théorème de relèvement

L'application $]-\pi, \pi[\to U \setminus \{-1\}$ qui à θ associe $\mathrm{e}^{i\theta}$ est une bijection continue. Pour tout $z \in U \setminus \{-1\}$, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Figure représentative : $U \setminus \{-1\}$ et $\mathrm{e}^{i\theta}$.

Déf : Ce réel θ choisi dans $]-\pi, \pi[$ est appelé argument principal de z. On le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Prop : $\forall z \in U \setminus \{-1\}$, $\mathrm{Arg}(z) = 2\arctan \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{1 + \mathrm{Re}(z)}$.

Théorème :

Si $f : I \to U$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$) alors il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall t \in I, f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

IV. Suites et séries de fonctions vectorielles

Les théorèmes qui suivent s'établissent comme pour les fonctions numériques.

1°) Intégration

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ vers E.

Théorème :

Si (f_n) CU vers $f : [a,b] \to E$ alors la $(\int_a^b f_n)$ suite CV et $\int_a^b f = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n$.

Cor : Si $\sum f_n$ CU sur $[a,b]$ alors la série $\sum \int_a^b f_n$ CV et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

2°) Dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers E.

Théorème :

Si (f_n) CS vers $f : I \to E$ et (f_n') CU vers sur tout $[a,b] \subset I$ vers $g : I \to E$ alors f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Cor : Si $\sum f_n$ CS sur I et $\sum f_n'$ CU sur tout $[a,b] \subset I$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ et $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

3°) Application : dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$

Soit E une algèbre normée de dimension finie et $a \in E$.

Théorème :

L'application $e_a : t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\exp(ta)' = a\exp(ta) = \exp(ta)a$.